MAT 133 — CÁLCULO II

LISTA DE EXERCÍCIOS 6

PROF. PAOLO PICCIONE

Exercício 1. *Quais das seguintes afirmações é verdadeira?*

(1) O gradiente ∇f de uma função diferenciável f é tangente às curvas de nível da f.

(2) O gradiente ∇f de uma função diferenciável f é ortogonal às curvas de nível da f.

(3) Se $C \subset \mathbb{R}^3$ é um conjunto fechado e $f\colon C \to \mathbb{R}$ é contínua, então f admite máximo e mínimo em C.

(4) Se $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função que admite todas as derivadas terceiras contínuas, então $f_{xyx} = f_{yxx}$.

(5) Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. O vetor $-\nabla f(x_0, y_0)$ indica a direção e o sentido que, estando em (x_0, y_0), deve-se tomar para que f decresça o mais rapidamente possível.

(6) Se (x_0, y_0) é um ponto crítico de f, e os autovalores da matriz Hessiana da f em (x_0, y_0) são iguais a 1 e 3, então (x_0, y_0) é um mínimo local da f.

Exercício 2. *Estude a função f dada no conjunto A com relação a máximos e mínimos.*

(a) $f(x, y) = -3x - y$,
$A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ y - x \leq 3,\ x + y \leq 4,\ 3x + y \leq 6\big\}$

(b) $f(x, y) = -3x - y$, $A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\big\}$

(c) $f(x, y) = x^2 + 3xy - 3x$, $A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\big\}$

(d) $f(x, y) = xy$, $A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\geq 0,\ y \geq 0,\ 2x + y \leq 5\big\}$

(e) $f(x, y) = y^2 - x^2$, $A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\big\}$

(f) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$, $A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\big\}$

Exercício 3. *Determine a equação da reta tangente à curva de nível dada, no ponto dado.*

(a) $x^2 + xy + y^2 - 3y = 1$ em $(1, 2)$

Data: 23 de novembro de 2014.

(b) $e^{2x-y} + 2x + 2y = 4$ em $(\frac{1}{2}, 1)$

Exercício 4. *Determine o ponto do plano $x + 2y - z = 4$ que se encontra mais próximo da origem.*

Exercício 5. *Deseja-se construir uma caixa, sem tampa, com a forma de um paralelepípedo-retângulo e com 1 m^3 de volume. O material a ser utilizado nas laterais custa o triplo do que será utilizado no fundo. Determine as dimensões da caixa que minimiza o custo do material.*

Exercício 6. *Determine a curva de nível de $f(x, y) = x^2 + 16y^2$ que seja tangente à curva $xy = 1, x > 0, y > 0$. Qual o ponto de tangência?*

Exercício 7. *Calcule a derivada direcional de f no ponto P e na direção do vetor $\vec{u}$.*

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $P = (1, 2)$ e $\vec{u}$ o versor de $2\vec{i} - \vec{j}$.
(b) $f(x, y) = x^2 - 3y^2$, $P = (1, 2)$ e $\vec{u}$ o versor de $2\vec{i} + \vec{j}$.
(c) $f(x, y) = e^{x^2-y^2}$, $P = (1, 1)$ e $\vec{u}$ o versor de $(3, 4)$.
(d) $f(x, y) = \arctan \dfrac{x}{y}$, $P = (3, 3)$ e $\vec{u} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.
(e) $f(x, y) = xy$, $P = (1, 1)$ e $\vec{u}$ o versor de $\vec{i} + \vec{j}$.

Exercício 8. *Classificar os pontos críticos das seguintes funções.*

(a) $f(x, y) = 3x^4 - x^2 + 2x^2y - 2xy$
(b) $f(x, y) = (x - y + 1)^2$
(c) $f(x, y) = y^4 - 4xy + 4x^2$
(d) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$
(e) $f(x, y) = xy + 8/x + 8/y$